

Université de Bretagne Occidentale
UFR Sciences et Techniques
LICENCE 2 MIAHS
Espaces euclidiens
Examen terminal, le 8 décembre 2025, 8h00–10h00
CORRIGE et BAREME

Exercice 1. a. La matrice A est réelle et symétrique. Elle est donc diagonalisable d'après le Théorème Spectrale. **(1 pt)**

b. Le polynôme caractéristique de A est, en développant le déterminant selon la première ligne :

$$\begin{aligned}\det(A - XI_3) &= \begin{vmatrix} 5-X & 4 & 0 \\ 4 & 3-X & -4 \\ 0 & -4 & 1-X \end{vmatrix} \\ &= (5-X) \cdot \begin{vmatrix} 3-X & -4 \\ -4 & 1-X \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -4 \\ 0 & 1-X \end{vmatrix} \\ &= (5-X)((3-X)(1-X) - 16) - 4(4(1-X)) \\ &= (5-X)(3-4X+X^2-16) - 16 + 16X = \\ &= (5-X)(-13-4X+X^2) - 16 + 16X \\ &= -65 - 20X + 5X^2 + 13X + 4X^2 - X^3 - 16 + 16X \\ &= -X^3 + 9X^2 + 9X - 81. \quad \textbf{(2 pts)}\end{aligned}$$

c. On factorise le polynôme caractéristique en sachant qu'il est divisible par $X - 3$:

$$\begin{aligned}-X^3 + 9X^2 + 9X - 81 &= -(X^3 - 9X^2 - 9X + 81) \\ &= -(X-3)(X^2 - 6X - 27) \\ &= -(X-3)(X+3)(X-9).\end{aligned}$$

Les valeurs propres de A sont donc $-3, 3, 9$. **(1 pt)**

d. On détermine des générateurs des espaces propres E_{-3}, E_3, E_9 :

Pour E_{-3} , résolvons

$$(A + 3I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 8x + 4y = 0 \\ 4x + 6y - 4z = 0 \\ -4y + 4z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x \\ z = y = -2x \end{cases}$$

Une solution non triviale est $x = 1, y = -2, z = -2$. On a donc

$$E_{-3} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}\right). \quad \textbf{(1 pt)}$$

Pour E_3 , résolvons

$$(A - 3I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 4y = 0 \\ 4x - 4z = 0 \\ -4y - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y \\ z = -2y \end{cases}$$

Une solution non triviale est $x = -2, y = 1, z = -2$. On a donc

$$E_3 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right). \quad \textbf{(1 pt)}$$

Pour E_9 , résolvons

$$(A - 9I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -4x + 4y = 0 \\ 4x - 6y - 4z = 0 \\ -4y - 8z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ y = -2z \end{cases}$$

Une solution non triviale est $x = -2, y = -2, z = 1$. On a donc

$$E_9 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right). \quad \textbf{(1 pt)}$$

Soit P la matrice dont les colonnes sont les générateurs de ces espaces propres :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1 \text{ pt})$$

D'après le cours, P est inversible et

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

e. On calcule :

$${}^tPP = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = 9I_3. \quad (1 \text{ pt})$$

Donc P n'est pas orthogonale, mais $Q = \frac{1}{3}P$ l'est car

$${}^tQQ = {}^t(\frac{1}{3}P)(\frac{1}{3}P) = \frac{1}{3}{}^tP\frac{1}{3}P = \frac{1}{9}{}^tPP = \frac{1}{9}9I_3 = I_3,$$

et on a toujours

$$Q^{-1}AQ = (\frac{1}{3}P)^{-1}A(\frac{1}{3}P) = 3P^{-1}A\frac{1}{3}P = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}. \quad (1 \text{ pt})$$

Exercice 2. a. On a

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1 \text{ pt})$$

b. On déroule l'algorithme de Gauss :

$$\begin{aligned} x^2 - 4xy + 2xz + 2xt + 4y^2 + z^2 + t^2 + 6zt &= (x - 2y + z + t)^2 + 4yz + 4yt + 4zt \\ &= (x - 2y + z + t)^2 + 4(yz + yt + zt) \\ &= (x - 2y + z + t)^2 + 4((y + t)(z + t) - t^2) \\ &= (x - 2y + z + t)^2 + 4(y + t)(z + t) - 4t^2 \\ &= (x - 2y + z + t)^2 + (y + t + z + t)^2 - (y + t - z - t)^2 - 4t^2 \\ &= (x - 2y + z + t)^2 + (y + z + 2t)^2 - (y - z)^2 - 4t^2. \quad (2 \text{ pts}) \end{aligned}$$

Si on pose donc

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

on a

$$Q(x, y, z, t) = Q'(M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}),$$

où Q' est la forme quadratique diagonale

$$Q'(x', y', z', t') = (x')^2 + (y')^2 - (z')^2 - 4(t')^2$$

sur $\mathbb{R}^4$. (1 pt)

c. D'après le b, la matrice de la forme bilinéaire symétrique Q' est la matrice diagonale

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

La signature de Q est donc $(2, 2)$. (1 pt)

d. Si on écrit

$$Q'(x', y', z', t') = (x')^2 + (y')^2 - (z')^2 - (2t')^2,$$

on a

$$Q(x, y, z, t) = Q'(M' \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}),$$

où

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et

$$Q''(x'', y'', z'', t'') = (x'')^2 + (y'')^2 - (z'')^2 - (t'')^2$$

On a alors ${}^t M' I_{2,2} M' = A$. Comme M' est inversible, on pose $P = (M')^{-1}$, et on a ${}^t P A P = I_{2,2}$, qui est bien diagonale avec coefficients diagonaux égaux à ± 1 (**1 pt**). On détermine donc $P = (M')^{-1}$, par exemple en effectuant la méthode du pivot de Gauss-Jordan sur la matrice en blocs $(M' | I_4)$:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \\ & \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \\ & \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right) \rightsquigarrow \end{aligned}$$

La matrice P est donc

$$P = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\mathbf{2 \text{ pts}})$$

d. On calcule

$$\begin{aligned} {}^t P A P &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ & \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ & \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = I_{2,2}. \quad (\mathbf{1 \text{ pt}}) \end{aligned}$$